Série 9 - Théorie de Sturm-Liouville

0 Règle de Leibnitz

La dérivée n^e du produit d'une fonction $f(x)$ et d'une fonction $g(x)$ s'écrit,

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\,\frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}}\,.$$

1 Formule de Rodrigues

Objectif : déterminer la formule de Rodrigues pour les polynômes de Laguerre, de Laguerre généralisés, de Legendre et de Legendre généralisés.

Théorie : analyse réelle.

Difficulté : ★★★★ obligatoire.

On considère une équation différentielle ordinaire homogène d'ordre 2 sous la forme de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx}\Big(w(x)\,p_2(x)\,y_n'(x)\Big) + \left(p_0(x) - \lambda_n\right) w(x)\,y_n(x) = 0\,,$$

où $w(x)$ est la fonction poids, $p_2(x) = \beta_2\,x^2 + \beta_1\,x + \beta_0$, $p_0(x) = 0$ et λ_n ne dépend pas de x. Dans ce cas, les solutions de cette équation différentielle sont des polynômes donnés par la formule de Rodrigues,

$$y_n(x) = \frac{c_n}{w(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big(w(x)\,p_2^n(x)\Big)\,,$$

où c_n est une constante telle que $c_0 = 1$ et λ_n est une fonction de $n \in \mathbb{N}$ qui s'annule lorsque $n = 0$. Par conséquent, $y_0(x) = 1$.

(a) L'équation différentielle de Laguerre est définie comme,

$$x\,L_n''(x) + (1 - x)\,L_n'(x) + n\,L_n(x) = 0\,.$$

Mettre cette équation différentielle sous la forme de Sturm-Liouville et en déduire la formule de Rodrigues qui donne les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ avec pour une constante $c_n = (n!)^{-1}$. Déterminer le développement en série de ces polynômes à l'aide de la règle de Leibnitz.

(b) L'équation différentielle de Laguerre généralisée (ou associée) est définie comme,

$$x\,L_n^{k\,\prime\prime}(x) + (k+1-\,x)\,L_n^{k\,\prime}(x) + n\,L_n^k(x) = 0\,,$$

où $L_n^0(x) = L_n(x)$. Mettre cette équation différentielle sous la forme de Sturm-Liouville et en déduire la formule de Rodrigues pour ces polynômes avec $c_n = (n!)^{-1}$. En déduire que les polynômes de Laguerre généralisés $L_n^k(x)$ peuvent être exprimés en termes des polynômes de Laguerre $L_n(x)$ comme,

$$L_n^k(x) = (-\,1)^k\,\frac{d^k}{dx^k}\,L_{n+k}(x)\ ,$$

en dérivant k fois l'équation différentielle de Laguerre, à l'aide de la règle de Leibnitz. Déterminer le développement en série de ces polynômes.

(c) L'équation différentielle de Legendre est définie comme,

$$\left(1-\,x^2\right)P_\ell''(x) -\,2x\,P_\ell'(x) + \ell\,(\ell+1)\,P_\ell(x) = 0\,.$$

Mettre cette équation différentielle sous la forme de Sturm-Liouville et en déduire la formule de Rodrigues qui donne les polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ avec une constante $c_\ell = (-\,1)^\ell/2^\ell\,\ell!$. Déterminer le développement en série de ces polynômes à l'aide du binôme de Newton.

(d) L'équation différentielle de Legendre généralisée (ou associée) est définie comme,

$$\left(1-\,x^2\right)P_\ell^{m\,\prime\prime}(x) -\,2x\,P_\ell^{m\,\prime}(x) + \left(\ell\,(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\,x^2}\right)P_\ell^m(x) = 0\,,$$

où $P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$. En déduire que les polynômes de Legendre généralisés $P_\ell^m(x)$ peuvent être exprimés en termes des polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ comme,

$$P_\ell^m(x) = (-\,1)^m\left(1-\,x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\,P_\ell(x)\ ,$$

en dérivant m fois l'équation différentielle de Legendre, à l'aide de la règle de Leibnitz, et en déduire la formule de Rodrigues pour ces polynômes.

2 Fonctions génératrices

Objectif : déterminer les fonctions génératrices et les relations de récurrence des polynômes de Laguerre et de Legendre.

Théorie : analyse complexe.

Difficulté : ★★★★ obligatoire.

(a) Déterminer la fonction génératrice de Laguerre,

$$g\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{n}\left(x\right)t^{n}\,,$$

et en déduire la relation de récurrence de Bonnet pour les polynômes de Laguerre en dérivant la fonction génératrice par rapport à t et x,

$$\left(n+1\right)L_{n+1}\left(x\right)=\left(2n+1-\,x\right)L_{n}\left(x\right)-\,n\,L_{n-1}\left(x\right)\,.$$

où $n\geqslant 1$. Déterminer les polynômes de Laguerre $L_1\left(x\right)$, $L_2\left(x\right)$, $L_3\left(x\right)$, $L_4\left(x\right)$ et $L_5\left(x\right)$.

(b) Déterminer la fonction génératrice de Legendre,

$$g\left(x,t\right)=\sum_{\ell=0}^{\infty}P_{\ell}\left(x\right)t^{\ell}\,,$$

et en déduire la relation de récurrence de Bonnet pour les polynômes de Legendre en dérivant la fonction génératrice par rapport à t,

$$\left(\ell+1\right)P_{\ell+1}\left(x\right)=\left(2\ell+1\right)x\,P_{\ell}\left(x\right)-\,\ell\,P_{\ell-1}\left(x\right)\,.$$

où $\ell\geqslant 1$. Déterminer les polynômes de Legendre $P_1\left(x\right)$, $P_2\left(x\right)$, $P_3\left(x\right)$, $P_4\left(x\right)$ et $P_5\left(x\right)$.

3 Orthogonalité des polynômes de Legendre

Objectif : démontrer les relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre.

Théorie : analyse réelle.

Difficulté : ★★★★ facultatif.

a) Montrer que les polynômes de Legendre $P_{\ell}(x)$ satisfont la relation d'orthogonalité sur l'intervalle $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell}(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell + 1}\, \delta_{\ell\ell'}\,,$$

à l'aide de l'identité intégrale suivante, basée sur l'équation différentielle de Legendre sous la forme de Sturm-Liouville,

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx} \Big(\big(1 - x^2\big)\, P'_{\ell}(x) \Big) + \ell\,(\ell + 1)\, P_{\ell}(x) \right) P_{\ell'}(x)\, dx = 0\,,$$

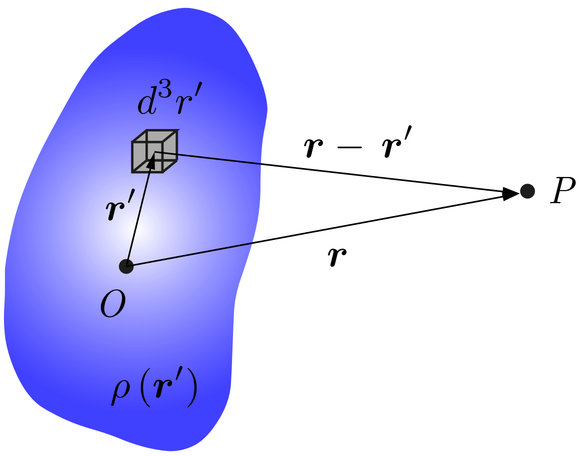
de la formule de Rodrigues et de la parité des polynômes de Legendre $P_{\ell}(x)$ et d'une relation de récurrence pour résoudre l'intégrale.

4 Développement multipolaire

Objectif : application des polynômes de Legendre à l'étude du potentiel électrostatique généré par une distribution quelconque de charges électriques.

Théorie : analyse réelle.

Difficulté : ☆☆☆☆ facultatif.



Le potentiel électrique au point P généré par une distribution de charges électriques de densité volumique de charge $\rho(\boldsymbol{r}')$ contenues dans un volume V s'écrit,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|}\, d^3r'$$

où le produit scalaire des vecteurs positions $\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\boldsymbol{r}' = r'\,\hat{\boldsymbol{r}}'$ s'écrit $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}' = r\, r' \cos\theta$ et les normes satisfont la relation d'ordre $r > r'$.

a) Exprimer le potentiel électrostatique en termes de la fonction génératrice $g(x,t)$ des polynômes de Legendre $P_\ell(x)$ d'une variable sans dimension $x = \cos\theta = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}'$ et identifier la variable sans dimension t.

b) Exprimer le potentiel électrostatique en termes des polynômes de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$.

c) Déterminer les trois premiers termes du développement en série du potentiel électrostatique, c'est-à-dire $\ell = 0, 1, 2$, et les interpréter physiquement dans la base canonique $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$. En déduire le n^e terme de ce développement.